Programme de colle de la semaine du 18 décembre

Chapitre 11: Introduction à l'algèbre linéaire
Chapitre 12: Utilisation de bases en algèbre linéaire

Exemples de questions de cours

- Forme géométrique du théorème du rang
- L'ensemble des endomorphismes de E est un espace vectoriel et un anneau
- Caractérisation algébrique des projecteurs et symétries ($\pi \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur ssi $\pi^2 = \pi$, etc.)
- Définitions algébriques et géométriques des hyperplans (noyau de forme linéaire et supplémentaire de droite vectorielle)
- Théorème de la base extraite-incomplète (cas d'une famille génératrice finie, énoncé et idée générale de la preuve)
- Base adaptée à à des supplémentaires
- Une application linéaire est injective (resp. surjective) ssi il existe une base dont l'image est libre (reps. génératrice) ssi l'image de toute base est libre (resp. génératrice)
- Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base

Programme

Introduction à l'algèbre linéaire

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

- Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$-ev)
- Règles de calcul dans un ev (multiplication par -1, pseudo-intégrité, etc.)
- Espace vectoriel produit, espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un ev
- Combinaison linéaire d'une nombre fini de vecteurs (CL)
- Sous-espaces vectoriels (sev)
- Un sev est un ev muni de la loi induite
- Intersection de sevs
- Somme de sevs
- Propriétés de la somme de sevs
- Somme directe de sevs
- Caractérisation de la somme directe de deux sevs par l'intersection
- Sevs supplémentaire
- Famille presque nulle (ou à support fini)
- CL: cas général
- Espace vectoriel engendré (Vect, défini par combinaisons linéaires)
- Propriétés du Vect
- Cas des droites vectorielles
- Espaces vectoriels classiques ($\mathbb{K}^n$, $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(\Omega, E)$, $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ etc.)

Familles de vecteurs

- Famille de vecteurs
- Sous-familles et sur-familles
- Définition d'une famille génératrice
- Interprétation du caractère générateur comme existence, interprétation comme surjectivité
- Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice
- Le Vect (et donc en particulier le caractère générateur) est invariant par dilatation, transposition et transvection
- Retrait sous condition d'un vecteur d'une famille génératrice
- Définition d'une famille libre
- Vocabulaire: famille liée, relation de liaison
- Interprétation du caractère libre comme unicité, interprétation du caractère libre comme injectivité
- Une sous-famille d'une famille libre est libre
- Une famille est libre ssi toute sous-famille finie est libre
- Invariance de la liberté par dilatation, transposition et transvection
- Ajout sous condition d'un vecteur à une famille libre
- Retour sur la non-nullité, la non-colinéarité, la non-coplanarité
- Base
- Interprétation comme existence et unicité, interprétation comme bijectivité
- Opérations sur une base
- Formes linéaires coordonnées associées à une base
- Exemples (dans $\mathbb{K}^n$, $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$)
- Utilisation de l'algorithme du pivot dans $\mathbb{K}^n$

Applications linéaires

- Définition
- Ensemble des application linéaires de E dans F, noté $\mathcal{L}(E, F)$
- Composée d'applications linéaires
- Bijection réciproque d'une application linéaire bijective
- Combinaison linéaires d'applications linéaires
- Vocabulaire: endomorphisme, isomorphisme, automorphisme
- Bilinéarité de la composition d'applications linéaires
- Ev $\mathcal{L}(E, F)$
- Algèbre $\mathcal{L}(E)$. Groupe linéaire $\mathcal{GL}(E)$
- Formes linéaires
- Espace dual $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$
- Exemples classiques: coordonnées, application linéaire canoniquement associée à une matrice, dérivation, etc.
- Image d'une application linéaire
- L'image (comme toute image directe) est un sev
- Image et surjectivité
- Noyau d'une application linéaire
- Le noyau (comme toute image réciproque) est un sev
- Noyau et injectivité
- Théorème de structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire
- Forme géométrique du théorème du rang
- Projections associées à une deux espaces supplémentaires
- Symétries associées à une deux espaces supplémentaires
- Caractérisation algébrique des projecteurs et symétries
- Définition d'une application linéaire par les restrictions sur deux sevs supplémentaires
- Sous espace stable
- Application linéaire induite

Formes linéaires et hyperplans

- Formes linéaires et espace dual
- Rappel sur les formes linéaires coordonnées
- Définition des hyperplans comme supplémentaire de formes linéaires
- Hyperplans comme supplémentaires de droites vectorielles
- Toute droite non contenue dans un hyperplan est un supplémentaire
- Deux formes linéaires dont le noyau est un même hyperplan sont proportionnelles
- Intersection d'hyperplans
- Retour sur les équations paramétriques/les équations cartésiennes

---

Utilisation de bases en algèbre linéaire

Théorème de base extraite-incomplète

- Rappels sur les bases, sur les coordonnées
- Théorème de base extraite-incomplète (cas d'une famille génératrice finie)
- Théorème de la base extraite-incomplète général (*admis*)
- Conséquence: existence de bases
- Conséquence: théorème de la base incomplète
- Conséquence: théorème de la base extraite

Bases adaptées à des sevs

- Base adaptée à un sev
- Existence de supplémentaire
- Base adaptée à une somme directe
- Base adaptée à des supplémentaires
- Base adaptée à une somme/intersection de deux sevs (*non exigible*)

Bases et applications linéaires

- L'image d'une famille génératrice par une application linéaire est une famille génératrice de l'image
- Une application linéaire est surjective ssi l'image il existe une famille dont l'image est génératrice ssi l'image de toute famille génératrice est génératrice
- Une application linéaire est injective ssi il existe une famille génératrice dont l'image est libre ssi l'image de toute famille libre est libre
- Une application linéaire est bijective ssi il existe une base dont l'image est une base ssi l'image de toute base est une base
- Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base
- Une application linéaire est entièrement déterminée par les coordonnées dans une base de l'espace d'arrivée de l'image d'une base de l'espace de départ
- Introduction aux matrices d'application linéaires

Résultats classiques

- Bases canoniques des espaces vectoriels classiques
- Réinterprétation de résultats classiques en termes d'algèbre linéaire
- Noyau et image et d'une composée d'applications linéaires (inclusions, cas d'égalités)
- Lien entre liberté et caractère générateur dans $\mathbb{K}^n$ et la résolution de systèmes
- Une famille échelonnée est libre
- Une famille de polynômes de degrés distincts est libre
- Famille de Vandermonde